

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Manuela Pavić

Matematička pismenost

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Manuela Pavić

Matematička pismenost

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić
Komentor: doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2019.

Sadržaj

Uvod	1
1. Što je matematička pismenost?	3
2. Organizacija područja matematičke pismenosti	6
2.1. Matematički sadržaj	6
2.1.1. Promjena i odnosi	7
2.1.2. Prostor i oblik	7
2.1.3. Količina	8
2.1.4. Neizvjesnost i podaci	8
2.2. Kontekst	9
2.3. Matematički procesi i osnovne matematičke sposobnosti	10
3. Matematizacija	13
3.1. Vrste matematizacije	13
3.2. Koraci matematizacije	14
4. PISA-ini rezultati iz matematičke pismenosti	17
5. Primjeri zadataka iz matematičke pismenosti	22
5.1. Pizze	22
5.2. Rast	22
5.3. Stolar	23
5.4. Okretna vrata	24
5.5. Devizni tečaj	26
5.6. Potres	28
Zaključak	30
Literatura	31
Sažetak	33
Summary	34
Životopis	35

Uvod

”Pored jezika i glazbe, matematika je jedna od glavnih manifestacija slobodne stvaralačke snage ljudskoga uma i univerzalno sredstvo za razumijevanje svijeta uz pomoć teorijskih konstrukcija.”

Hermann Weyl

Kako ni u jezikoslovlju pojam pismenost ne podrazumijeva samo poznavanje gramatike i pravopisa nekog jezika već i kreativnost, odnosno posjedovanje vlastitog stila, izričaja te sposobnost analiziranja, tako se ni matematička pismenost ne može ograditi samo na vještine izvođenja matematičkih operacija, poznavanje terminologije, činjenica i metoda za rješavanje problema, ali su oni nužan preduvjet. U prvom poglavlju definirana je matematička pismenost i opisano je što ona točno obuhvaća. Međunarodni program za procjenu znanja i vještina učenika (Programme for International Student Assessment - PISA) provodi istraživanje matematičke pismenosti u 35 zemalja članica te 37 partnerskih zemalja Organizacije za ekonomsku suradnju i razvoj (Organisation for Economic Co-operation and Development - OECD). Kako je ovo najveće obrazovno istraživanje na svijetu ovaj rad se temelji na njemu. Cilj PISA istraživanja je određivanje sposobnosti primjene usvojenih znanja i vještina u novim okolnostima i nepoznatim situacijama, odnosno utvrđivanje pripremljenosti petnaestogodišnjih učenika (koji se bliže kraju obaveznog obrazovanja) za uspješno i aktivno sudjelovanje u društvenom, kulturnom i političkom životu. To podrazumijeva primjerice i donošenje važnih poslovnih odluka što zahtijeva sposobnosti poput analiziranja, logičkog zaključivanja, argumentiranja te učinkovitog komuniciranja. Iz tog razloga PISA osim matematičke pismenosti ima još dva glavna ispitna područja: čitalačku i prirodoslovnu pismenost. Istraživanje se provodi svake tri godine, a svaki ciklus dobiva ime po godini glavnog istraživanja (postoje i probna istraživanja s ciljem uvođenja škole u testiranje). Dvije trećine svakog ispitivanja posvećuje se procjeni jednog od tri navedena glavna područja čime se omogućuje detaljna analiza postignuća u svakom području procjene svakih devet godina te analizu trendova svake tri godine. Trogodišnja razdoblja osiguravaju dovoljno vremena kako bi se na osnovu rezultata i utvrđivanja slabih i jakih točaka pojedinog obrazovnog sustava mogle uvesti promjene uočene u praksi uspješnijih zemalja sudionica istraživanja i time poboljšati obrazovnu politiku pojedine zemlje. Radi potrebe mjerenja matematičke pismenosti kreirana je njezina opsežna teorijska

pozadina te je u drugom poglavlju opisan PISA-in konceptualni okvir matematičke pismenosti. Uz matematičke sadržaje, ovdje se opisuju i konteksti zadanih problema te procesi i osnovne matematičke sposobnosti.

U trećem poglavlju detaljno je opisan proces matematizacije. Ovdje ćete pročitati više o njezinim dvjema vrstama te su na primjeru iz stvarnog života objašnjeni koraci matematizacije.

U četvrtom poglavlju prikazani su rezultati iz matematičke pismenosti s osvrtom na postignuća hrvatskih učenika. Definirane su i razine znanja i sposobnosti s pripadajućim bodovima.

Zadnje poglavlje sadržava primjere ispitnih cjelina s klasificiranim pitanjima prema sadržaju, kontekstu i procesu. Ispitne cjeline mogu sadržavati kraći uvodni tekst, slike, grafikone, dijagrame, tablice te jedno ili više pitanja. PISA većinu ispitnih pitanja drži u tajnosti iz razloga što ih ponavlja kroz više ciklusa te su javnosti dostupni samo primjeri koji se više ne primjenjuju u istraživanjima.

1. Što je matematička pismenost?

Područje matematičke pismenosti tiče se vještine zaključivanja učenika na temelju stečenih matematičkih sposobnosti kako bi zadovoljili buduće izazove. Naime, kako bi današnji učenici uspješno zakoračili u svijet odraslih potrebno im je osnovno matematičko znanje i razumijevanje usvojeno u školi te sposobnost da učinkovito analiziraju, rasuđuju i prenose ideje postavljanjem, oblikovanjem i rješavanjem matematičkih problema iz raznih područja i u raznim situacijama. Dakle, matematički pismenima smatramo sve one koji uspješno savladavaju svakodnevne životne izazove na temelju svojih matematičkih znanja i sposobnosti.

Međutim, matematička pismenost nije jasno definiran pojam i u međunarodnim okvirima postoje različita shvaćanja ovog pojma te su u nastavku iznešene neke od definicija.

Jablonka 2003. objavljuje istraživanje o različitim međunarodnim pogledima na matematičku pismenost gdje zaključuje da se stajališta razlikuju prema temeljnim principima sudionika te kulturološkim razlikama.

Navodi kako Američko Nacionalno vijeće obrazovanja i disciplina (National Council on Education and Disciplines - NCED) koristi pojam *kvantitativna pismenost* kako bi naglasilo važnost propitkivanja značenja sposobnosti rada s brojevima u društvu koje sve više upotrebljava brojeve i kvantitativne informacije [9].

Kvantitativna pismenost je sposobnost da se učinkovito nosi s kvantitativnim aspektima života [10].

Znanje i vještine potrebne za primjenu aritmetičkih operacija, bilo zasebno ili uzastopno, koristeći brojeve utisnute u printani materijal (npr. balansiranje čekovne knjižice, dovršavanje obrasca narudžbe) [13].

Skupina vještina, znanja, vjerovanja, rasporeda, navika razmišljanja, sposobnosti komunikacije i vještina rješavanja problema koje ljudi trebaju kako bi se učinkovito uključili u kvantitativne situacije u životu i na poslu [11].

Problem koji imamo s ovim definicijama je njihov očit fokus na kvantiteti jer matematička pismenost nije ograničena na sposobnost primjenjivanja kvantitativnih aspekata matematike, već uključuje znanje matematike u širem smislu.

Naši matematički koncepti, strukture i ideje smišljeni su kao oruđe za organiziranje pojava fizičkog, društvenog i mentalnog svijeta [5].

Ova izjava potiče optimistično tumačenje snage matematičkog mišljenja za rješavanje pojedinačnih i društvenih problema, istovremeno shvaćajući matematičke alate kao

nekulturološke. Ona rađa koncepciju matematičke pismenosti u smislu da uz sposobnost analiziranja, razmišljanja, komuniciranja te razmjene ideja i rezultata postavljamo i rješavamo matematičke probleme. To uključuje matematizaciju i matematičko modeliranje.

Matematika je učinkovit alat za pomoć u rješavanju složenih problema poput rasta stanovništva, poplava, oluja, epidemija itd., koji utječu na svakodnevni život stanovnika neke zemlje... Oni [nerazvijene zemlje] nemaju odgovarajuće obučene učitelje ili matematičare koji mogu prihvatiti izazov problema znanosti, tehnologije i društva koje očekuje matematičko modeliranje i matematička rješenja [1].

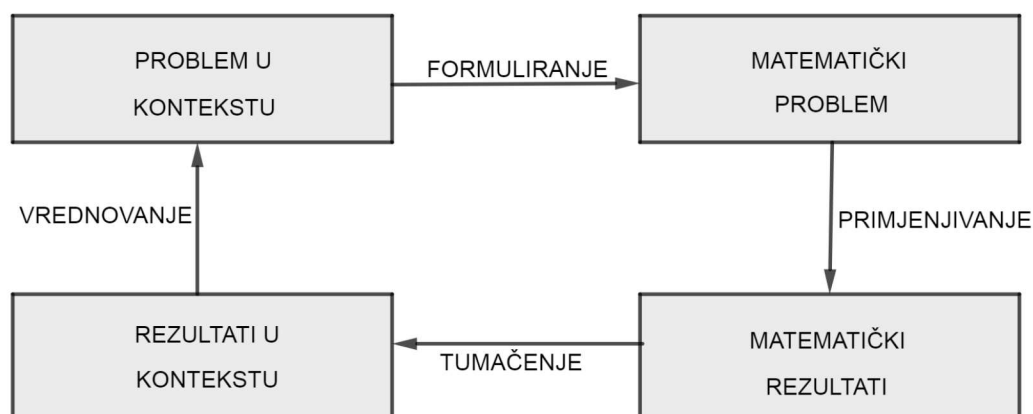
Prema [9] različite koncepcije matematičke pismenosti povezane su s načinom na koji je zamišljen odnos između matematike, okolne kulture i kurikuluma. Matematička pismenost definirana je kao skup znanja, vještina i vrijednosti koje nadilaze poteškoće koje proizlaze iz kulturnih razlika i ekonomskih nejednakosti jer se matematika i matematičko obrazovanje sami po sebi ne smatraju vezanima uz kulturu i nisu potaknuti materijalnim vrijednostima. Matematička pismenost je povezana s učenjem razmišljanja, ali ne i s učenjem o čemu razmišljati.

Nama je najbitnija danas najprihvaćenija definicija koju donosi OECD/PISA: *Matematička pismenost je sposobnost pojedinca da formulira, primjenjuje i tumači matematiku u različitim kontekstima. Ona obuhvaća matematičko zaključivanje i primjenu matematičkih koncepata, postupaka, činjenica i alata potrebnih za opisivanje, objašnjavanje i predviđanje pojava. Ona pomaže pojedincu da prepozna ulogu koju matematika ima u svijetu i da donosi dobro utemeljene odluke i prosudbe koje su mu potrebne kao konstruktivnom, zainteresiranom i promišljajućem građaninu [2].*

Primarni fokus ove definicije nisu matematičko znanje i vještine definirane unutar tradicionalnog školskog kurikuluma, nego je naglasak na primjeni matematičkih znanja u svakodnevnim životnim situacijama. Temelj ove definicije je sposobnost za postavljanje, oblikovanje i rješavanje matematičkih problema unutar raznih područja i situacija.

Slika 1 prikazuje model matematičke pismenosti u praksi. Proces započinje problemom u kontekstu koji se događa u stvarnom svijetu. Situacije pri tome variraju od čisto matematičkih problema do onih u kojima matematička struktura u početku nije očigledna te ju ispitanik tek mora identificirati i matematički formulirati pomoću zadanih činjenica, uočenih odnosa i polaznih pretpostavki u matematički problem. Potom slijedi rješavanje postavljenog matematičkog problema uz pomoć

zaključivanja, manipuliranja, transformiranja i naravno računanja. Pri tome ispitanik primjenjuje matematičke koncepte, činjenice, pravila, postupke i alate. Nakon dobivenih matematičkih rezultata potrebno ih je protumačiti u odnosu na početni problem, tj. uvidjeti što bi značili dobiveni rezultati u zadanom kontekstu. Zatim slijedi vrednovanje smislenosti rezultata u kontekstu gdje ispitanik argumentira ima li dobiveni matematički rezultat smisla s obzirom na zadani problem u kontekstu.



Slika 1: Model matematičke pismenosti u praksi [2]

2. Organizacija područja matematičke pismenosti

PISA-ina definicija matematičke pismenosti u svom teorijskom dijelu objedinjuje tri dimenzije: sadržaj, kontekst te matematičke procese i osnovne matematičke sposobnosti.

2.1. Matematički sadržaj

Da bi pojedinac u modernom društvu rješavao probleme i tumačio situacije iz osobnog, društvenog, profesionalnog i znanstvenog područja treba posjedovati određeno matematičko znanje i razumijevanje. PISA istraživanje zahtijeva od učenika povezivanje znanja iz raznih grana matematike, odnosno razumijevanje matematičkih sadržaja i sposobnost primjene istih kako bi uspješno došli do rješenja problema. U stvarnom svijetu, rijetko imamo priliku susresti probleme koji su, kao školski matematički kurikulum, strogo podijeljeni po granama matematike pa izazovi i situacije s kojima se svakodnevno susrećemo rijetko nam nude pravila i smjernice kako ih riješiti. Potrebna je kreativnost kako bismo uočili mogućnost unošenja matematike u situaciju i formulirali iz nje matematički problem. Pri tome se služimo različitim matematičkim konceptima, činjenicama ili alatima.

Tradicionalna područja matematike nisu temeljna značajka u domeni matematičke pismenosti PISA istraživanja. Odnosno, sadržaj koji se ocjenjuje nije organiziran oko grana matematike koje predstavljaju trenutni školski kurikulum. Cilj je procijeniti punu širinu postignuća na koherentan, cjelovit način, radije nego testirati fragmentalne dijelove činjeničnog znanja (reproduciranje, definiranje, računanje). Domena matematike je tako bogata i osebujna da je bilo teško napraviti kvalitetan izbor od nekoliko područja koja bi bila dovoljno raznolika i duboka da pokriju temeljne stvari u matematici, a da se podudaraju i sa školskim matematičkim kurikulumom. Sljedeće kategorije matematičkih sadržaja koriste se u PISA istraživanju kako bi se udovoljilo tom zahtjevu:

- promjena i odnosi
- prostor i oblik
- količina
- neizvjesnost i podaci.

Ova kategorizacija matematičkih sadržaja omogućava raširenost ispitnih pitanja unutar matematičkog kurikuluma, ali je bitno naglasiti da se neke teme mogu pojaviti u više kategorija što je vidljivo u primjeru *Pizze* [odjeljak 5.1.].

Neke od tema korištenih u dosadašnjim PISA istraživanjima su primjerice funkcije, algebarski izrazi, jednadžbe i nejednadžbe, koordinatni sustav, odnos unutar i između geometrijskih likova u dvije i tri dimenzije, mjerenja, brojevi i jedinice, aritmetičke operacije, postoci, omjeri i proporcije, procjene, slučajnost i vjerojatnost, prikupljanje podataka, prikazivanje i tumačenje.

2.1.1. Promjena i odnosi

Svaka prirodna pojava ili društveni fenomen manifestacija je promjene kao primjere mijenjanje organizama tijekom rasta, sukcesivno izmjenjivanje godišnjih doba, plima i oseka, valutne promjene ili razine zaposlenosti. Utjecajem elemenata jednih na druge ili promjenama uzrokovanim unutar sustava međusobno povezanih objekata stvaraju se privremeni ili stalni odnosi. Promjene se većinom događaju tijekom vremena, ali ponekad nastaju i međusobnim utjecajem objekata. Uzrokovane promjene mogu biti jednokratne ili kontinuirano izmjenjive. Promjene i odnose moguće je pratiti i opisivati odgovarajućim funkcijama i jednadžbama. Pregled stupnjeva rasta raznih fenomena rasta dovodi do linearnih, eksponencijalnih, logaritamskih, periodičkih i logističkih krivulja te njihovih svojstava i odnosa. Za objašnjavanje uzoraka iz prirode, umjetnosti i arhitekture može se koristiti i geometriju. Uzorci rasta mogu se objasniti algebarskim oblicima i prikazati grafovima.

Upotreba računalne tehnologije omogućila je sofisticiranije načine vizualiziranja podataka. Grafičko prikazivanje funkcije, tablice s podacima, manipuliranje parametrima te algebarski i geometrijski prikaz olakšavaju nam opisivanje i tumačenje promjene i odnosa.

Primjer ovog sadržajnog područja je ispitna cjelina *Rast* [odjeljak 5.2.].

2.1.2. Prostor i oblik

Kategorija prostor i oblik obuhvaća vizualizaciju stvarnog svijeta i prikazivanje objekata pomoću geometrijskih uzoraka (npr. brdo možemo modelirati kao stožac, svijeću kao valjak, loptu kao kuglu, šator kao piramidu itd.). Proučavanje oblika i konstrukcija podrazumijeva traženje sličnosti i razlika između oblika, analiziranje različitih komponenti objekta i prepoznavanje oblika u različitim dimenzijama i

prikazima. Pri tome je važno razumjeti relativne položaje objekata te odnos između oblika i slika ili vizualnih predodžbi. Zadatke smještene u ovu kategoriju često rješavamo pomoću mjernih formula.

Programska podrška na računalu omogućava manipuliranje dinamičnim prikazima oblika te istraživanje odnosa unutar i između geometrijskih objekata u tri dimenzije. Ispitna cjelina *Stolar* [odjeljak 5.3.] i prva dva pitanja cjeline *Okretna vrata* [odjeljak 5.4.] primjeri su sadržajne kategorije *prostor i oblik*.

2.1.3. Količina

Prema [4] koncept količine fokusira se na potrebu kvantifikacije radi organiziranja svijeta. Važni aspekti uključuju znanje o brojevima, razumijevanje mjera, veličina, jedinica te prepoznavanje brojčanih uzoraka. Kvantifikacija obuhvaća prebrojavanje, mjerenje (duljine, površine, obujma, mase, visine, brzine, tlaka), omogućuje modeliranje situacija, organiziranje i interpretaciju podataka te procjenjivanje neizvjesnosti. Nužne komponente kvantitativnog zaključivanja su osjećaj za brojeve i njihovu veličinu (razumijevanje što je veliko ili maleno, malo ili mnogo, visoko ili nisko, više ili manje) prikazivanje brojeva na različite načine, razumijevanje značenja matematičkih operacija, pisanje i razumijevanje matematički elegantnog računa, spretno i mentalno računanje, procjenjivanje i vrednovanje logičnosti rezultata. Ispitna cjelina *Devizni tečaj* [odjeljak 5.5.] te zadnje pitanje ispitne cjeline *Okretna vrata* [odjeljak 5.4.] odnose se na *količinu*.

2.1.4. Neizvjesnost i podaci

Neizvjesnost postoji u rezultatima izbora, znanstvenim predviđanjima, nepouzdanim vremenskim prognozama, rezultatima anketa te gospodarskim modelima. U mnogim problemskim situacijama pojavljuje se neizvjesnost te je za njihovo rješavanje nužan rad s podacima, njihovo analiziranje, prikazivanje i interpretiranje, a zatim i prosuđivanje i donošenje zaključaka.

Kategorija sadržaja neizvjesnost i podaci obuhvaća prepoznavanje varijacije u procesima, posjedovanje osjećaja za kvantifikaciju i varijacije, prepoznavanje neizvjesnosti i pogreške u mjerenju te svijest o vjerojatnosti. Ova kategorija uključuje i izvođenje, tumačenje i vrednovanje zaključaka u situacijama u kojima neizvjesnost ima središnje mjesto [2].

Rad na računalu olakšava rad s većim skupovima podataka te omogućava korištenje matematičkih alata za manipuliranje, analiziranje i prikazivanje podataka.

Ispitna cjelina *Potres* [odjeljak 5.6.] pripada ovoj sadržajnoj kategoriji.

2.2. Kontekst

Važna komponenta definicije matematičke pismenosti je korištenje i primjena matematike u različitim situacijama iz stvarnosti. Kontekst predstavlja okruženje unutar kojeg su smješteni problemi. Izbor matematičkih metoda i prikaza često ovisi o kontekstu u kojem se javlja problem. Od pojedinca se očekuje da prepozna kako prakse naučene u jednoj situaciji mogu biti uspješno primijenjene u drugoj, sličnoj situaciji.

Definirane su četiri kategorije konteksta prema kojima su klasificirana PISA ispitna pitanja: osobni, profesionalni, društveni i znanstveni. Zastupljenost više kategorija konteksta omogućava širok raspon primjene matematike, ali prema učeničkim interesima za razliku od zadataka na koje nailazimo u matematičkim udžbenicima i zbirkama čiji je primarni cilj uvježbati matematiku. PISA ponekad ubacuje i izmišljene elemente u svoja pitanja kako bi udaljenost od konteksta bila jednaka prema svim ispitanicima (u ispitnoj cjelini *Pizze* [odjeljak 5.1.] koristi se izmišljena valuta "zedi").

- OSOBNI - Problemi u osobnom kontekstu najbliži su ispitaniku jer se odnose na aktivnosti iz svakidašnjeg života poput igre, putovanja, financijske situacije, konzumiranja i pripremanja hrane, zdravstvenog stanja, kupovanja, darivanja ili odmaranja.

Ispitna cjelina *Pizze* [odjeljak 5.1.] pripada osobnom kontekstu.

- PROFESIONALNI - Problematika profesionalnog konteksta odnosi se na rad, školski život te izvanškolske aktivnosti. Ovdje pripadaju sve razine rada, od nestručnog do najvišeg ranga stručnog rada. Pitanja se mogu odnositi na pravljenje kalkulacije ili inventure u trgovini, pravljenje nacрта ili mjerenje u arhitekturi, pisanje domaćih zadaća ili vođenje stručne prakse i slično.

Primjer profesionalnog konteksta je ispitna cjelina *Stolar* [odjeljak 5.3.].

- DRUŠTVENI - Problemi društvenog konteksta temelje se na lokalnoj, regionalnoj ili globalnoj zajednici, tj. na društvu u cjelini. Pitanja mogu obuhvaćati javnu politiku, ratovanje, gospodarstvo, birački sustav, organiziranje javnih

nastupa, prosvjeda itd.

Ispitna cjelina *Devize* [odjeljak 5.5.] primjer je društvenog konteksta.

- ZNANSTVENI - Problemi smješteni u znanstveni kontekst najudaljeniji su ispitaniku, a usredotočeni su na primjenu matematike u stvarnom svijetu, znanosti i tehnologiji. Znanstveni konteksti uključuju dokaze apstraktnih pretpostavki i pitanja koja objašnjavaju uzročno-posljedične veze u stvarnosti. Ispitne cjeline *Rast* [odjeljak 5.2.], *Potres* [odjeljak 5.6.] i *Okretna vrata* [odjeljak 5.4.] smještene su u znanstveni kontekst.

2.3. Matematički procesi i osnovne matematičke sposobnosti

Matematička pismenost usredotočena je na sposobnost učenika da analiziraju, logički zaključuju i učinkovito iznose svoje ideje dok sastavljaju, formuliraju, rješavaju i interpretiraju rješenja matematičkih problema u različitim situacijama [2].

U definiciji matematičke pismenosti možemo uočiti procese: *formuliranje, primjenjivanje i tumačenje* kroz koje prolazimo tijekom rješavanja problema.

- Matematičko **formuliranje** situacija odnosi se na prepoznavanje prilika za korištenje i primjenu matematike pri rješavanju problema smještenog u stvarno životno okruženje. Aktivnosti poput prepoznavanja matematičke strukture i varijabli u problemu, stvaranje odgovarajućih pretpostavki te transformiranja problema u matematički jezik ili prikaz obuhvaćene su ovim procesom. Ovaj proces prisutan je u ispitnoj cjelini *Pizze* [odjeljak 5.1.] te u drugom i trećem pitanju ispitne cjeline *Okretna vrata* [odjeljak 5.4.].
- **Primjenjivanje** matematičkih koncepata, činjenica, postupaka i zaključivanja omogućuje nam pronalaženje rješenja matematički formuliranog problema. Ovaj proces uključuje računanje, rješavanje jednadžbi, matematičko analiziranje tablica i grafikona, logičko zaključivanje itd. Ispitne cjeline *Rast* [odjeljak 5.2.] i *Stolar* [odjeljak 5.3.] te prvo pitanje cjeline *Okretna vrata* [odjeljak 5.4.] i prva dva pitanja cjeline *Devize* [odjeljak 5.5.] klasificirana su kao *primjenjivanje matematičkih koncepata, činjenica, postupaka i zaključivanja*.

- **Tumačenje**, primjenjivanje i vrednovanje matematičkih rezultata proces je koji zahtijeva promišljanje o smislenosti istih s obzirom na zadani problem. On uključuje vrednovanje i kritičko analiziranje ili utvrđivanje logičnosti dobivenog rješenja u odnosu na kontekst stvarnih životnih problema u zadatku pri čemu je potrebno potkrijepiti činjenicama smislenost matematičkog rezultata. Ovaj proces prisutan je u trećem pitanju cjeline *Devize* [odjeljak 5.5.] te u ispitnoj cjelini *Potres* [odjeljak 5.6.].

Posjedovanje matematičkih sposobnosti omogućava razumijevanje matematike i rješavanje problema. **Osnovne matematičke sposobnosti** koje se koriste u PISA-inom matematičkom konceptualnom okviru su:

- **KOMUNICIRANJE** - Ova sposobnost iziskuje izražavanje matematičkih sadržaja usmeno ili pisano (upotrebljavanje matematičkih oznaka, iznošenje matematičkih ideja, rezultata, znanja, obrazloženja itd.) te razumijevanje tuđih matematičkih ideja, tj. radova.
- **MATEMATIZIRANJE** - Ova sposobnost obuhvaća prevođenje problema iz stvarnosti u matematički oblik, rješavanje tog problema te promišljanje o dobivenom matematičkom rješenju u odnosu na postavljeni problem iz situacije u stvarnosti. Matematizacija je detaljnije opisana u poglavlju 3.
- **PRIKAZIVANJE** - Ova sposobnost podrazumijeva prikazivanje matematičkih objekata i situacija pomoću grafikona, dijagrama, tablica, slika, formula i slično. To obuhvaća i prelaženje iz jednog načina prikaza u drugi (tablica-graf).
- **ZAKLJUČIVANJE I ARGUMENTIRANJE** - Ove sposobnosti uključuju objašnjavanje postupaka korištenih u dobivanju matematičkih rezultata, povezivanje pojedinačnih informacija radi dobivanja rješenja, promišljanje o dobivenim matematičkim rješenjima i argumentiranje logičnosti istih u odnosu na zadani problem iz stvarnog životnog konteksta te razlikovanje matematičkih tvrdnji poput teorema, definicija, korolara, pretpostavki itd.
- **RAZVIJANJE STRATEGIJA ZA RJEŠAVANJE PROBLEMA** - Ova sposobnost obuhvaća razvoj plana za preoblikovanje kontekstualiziranih problema te provođenje tog plana, ali i osmišljavanje strategija za vrednovanje dobivenog matematičkog rješenja za zadani problem.

- KORIŠTENJE SIMBOLIČKOG, FORMALNOG I TEHNIČKOG JEZIKA I OPERACIJA - Ova sposobnost uključuje prevođenje s prirodnog na simbolički jezik, interpretaciju simboličkog i formalnog jezika, rukovanje s izjavama koje sadrže simbole i formule, korištenje varijabli, simbola, dijagrama, algoritama te rješavanje jednadžbi i računanje.
- KORIŠTENJE MATEMATIČKIH ALATA - Ova matematička sposobnost zahtijeva poznavanje i vještinu korištenja raznih pomagala i alata (uključujući informatičke alate) u matematičkoj aktivnosti i znanje o ograničenjima takvih pomagala i alata. Od ciklusa PISA 2012 koriste se ispitna pitanja čije rješavanje uvelike olakšava korištenje kalkulatora. Učenici su u mogućnosti koristiti online kalkulatore i/ili programsku podršku s ekvivalentnim funkcijama, ali i svoj kalkulator. Uz to, omogućeni su im i drugi matematički alati poput virtualnih mjernih i vizualizacijskih alata, proračunskih tablica i različitih grafičkih prikaza.

3. Matematizacija

Matematizacija je proces kojim rješavamo probleme iz stvarnog života uz pomoć znanja i vještina stečenih kroz školovanje i životna iskustva. Obuhvaća osnovne matematičke aktivnosti poput:

- strukturiranja
- konceptualiziranja
- shematiziranja
- formuliranja matematičkog problema
- tumačenja dobivenih matematičkih rezultata u odnosu na izvorni problem.

3.1. Vrste matematizacije

Postoje dvije vrste matematizacije: horizontalna i vertikalna.

Horizontalna matematizacija odnosi se na organizaciju shvaćene stvarnosti kroz upotrebu matematičkih ideja i koncepata. Ona zahtijeva aktivnosti poput:

- prepoznavanja prilika za korištenje i primjenu matematike
- dobivanja matematičke strukture i prikaza (shematiziranje i vizualiziranje)
- otkrivanja odnosa i pravilnosti
- prepoznavanja sličnosti između različitih problema
- stvaranja pojednostavljenih pretpostavki da bi se riješio neki problem.

Matematički pismen pojedinac koristeći stečena znanja i vještine otkriva nepoznate pravilnosti, odnose i strukture.

Nakon modeliranja zadanog problema u kontekstu u matematički problem, može ga se riješiti matematičkim alatima i tada nastupa **vertikalna matematizacija** koju prepoznamo u sljedećim aktivnostima:

- predstavljanje odnosa formulama
- iznošenje pravilnosti

- analiziranje podataka iz matematičkih prikaza i grafikona
- otkrivanje veza između koncepata te njihova primjena
- generaliziranje
- matematičko zaključivanje
- tumačenje.

Dakle, matematizacija se odvija kroz dva povezana procesa. Horizontalna matematizacija je proces prevođenja stvarnog svijeta u matematički svijet, a vertikalna matematizacija obuhvaća rad na problemu unutar matematičkog svijeta i korištenje matematičkih alata kako bi se riješio problem te refleksije za utvrđivanje smislenosti dobivenog rješenja.

Horizontalna matematizacija je prelazak iz stvarnog svijeta u svijet simbola dok vertikalna matematizacija znači kretanje unutar svijeta simbola [6].

3.2. Koraci matematizacije

Prema OECD-u proces matematizacije sastoji se od 5 koraka [8]:

1. Kretanje od problema iz stvarnog svijeta.
2. Organiziranje informacija i podataka u zadanom problemu prema matematičkim konceptima.
3. Transformiranje konkretne primjene iz stvarnosti na apstraktni matematički problem.
4. Rješavanje matematičkog problema.
5. Refleksija s matematičkog rješenja na situaciju iz stvarnog svijeta kako bi se odredila smislenost odgovora.

Korake matematizacije možemo pratiti i na Slici 1 - Modelu matematičke pismenosti u praksi. Prva tri koraka su prevođenje problema iz stvarnosti u matematički problem i to je svrstano u proces *formuliranje*. Četvrti korak (rješavanje matematičkog problema) prikazan je kao *primjenjivanje*. U zadnjem koraku (refleksija), nakon

dobivanja rezultata matematičkog problema, stavljamo ga u polazni kontekstualizirani problem što je u prikazu označeno kao *tumačenje*. Na kraju određujemo smislenost rješenja, tj. može li se ono primijeniti na početni problem iz stvarnog života i to je prikazano kao *vrednovanje*.

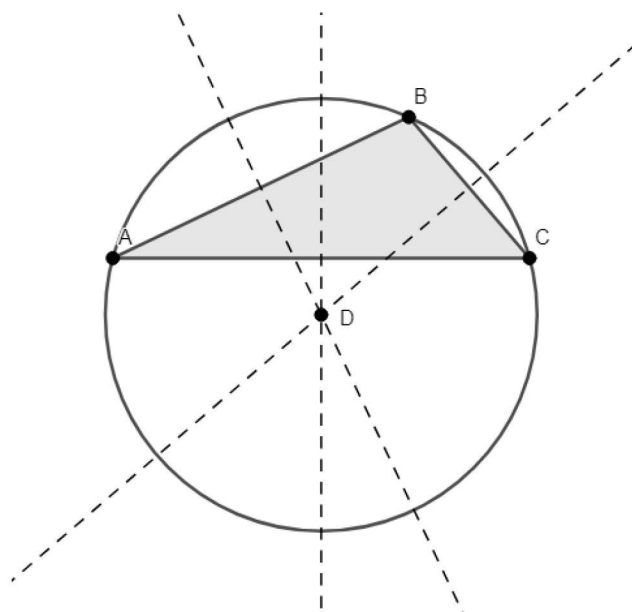
Pomoću sljedećeg primjera iz PISA istraživanja objašnjen je proces matematizacije u kojem ćemo u zadnjem koraku uvidjeti važnost refleksije na rješenje koja rijetko dobiva prikladnu pozornost u našem školstvu.

Primjer 3.1 (Rasvjeta) *Gradsko vijeće želi postaviti rasvjetu u mali park trokutastog oblika tako da svjetiljka obasjava cijeli park. Gdje treba postaviti svjetiljku [7]?*

Proces matematizacije:

1. Započinjanje s problemom iz stvarnosti. U parku trokutastog oblika trebamo smjestiti svjetiljku na pravo mjesto tako da obasjava cijeli park.
2. Zadanu situaciju iz stvarnosti treba organizirati prema matematičkim konceptima. Ovdje je potrebno geometrijsko znanje povezano s idejama prostora i oblika. Park ćemo prikazati trokutom, a svjetlost svjetiljke krugom čije središte određuje položaj svjetiljke u trokutu, odnosno parku.
3. Stvarni problem smještanja svjetiljke u park zamijenili smo matematičkim problemom pronalaska središta kruga koji opisuje zadani trokut. Dakle, dolazimo do konkretnih ideja kako trokutu opisati kružnicu.
4. Uz pomoć konstrukcije trokutu opisane kružnice rješavamo matematički problem. Središte trokutu opisane kružnice nalazi se u sjecištu simetrala stranica i jednako je udaljeno od vrhova trokuta.
5. Matematičko rješenje primjenjujemo na početni problem iz stvarnog života i uviđamo nelogičnost ako pretpostavimo da je park oblika tupokutnog trokuta.

Na Slici 2 prikazano je kako se središte opisane kružnice tupokutnog trokuta nalazi izvan tog trokuta. U tom slučaju, svjetiljku bi morali postaviti izvan parka što se kosi s uvjetom zadatka da svjetiljku treba postaviti u park. Nadalje, potrebno je razmisliti i o drugim čimbenicima iz stvarnosti koji bi mogli utjecati na smislenost rješenja postavljenog problema poput primjerice veličine drveća u parku.



Slika 2: Središte opisane kružnice tupokutnog trokuta

Matematiziranje nije potrebno u svim PISA-inim zadacima jer su neki problemi zadani u matematičkom obliku. U nekim zadacima potrebna je jednostavna matematizacija, ali ima primjera gdje je potrebna i zahtjevnija poput *Rasvjete* [3.1]. Tu je, uz uviđanje nemogućih rješenja, potrebno i precizno i jasno formulirati problem i objasniti rješenje.

Osnovni obrazovni cilj treba biti učenje matematizacije kako bi se učenici po završetku školovanja znali nositi s vrlo složenim i promjenjivim društvom.

4. PISA-ini rezultati iz matematičke pismenosti

Zadnje objavljene rezultate PISA-inog istraživanja (PISA 2015) iz matematičke pismenosti promatrat ćemo pomoću prosječnih rezultata učenika zemalja sudionica na ukupnoj skali (Tablica 1) te prema zastupljenosti učenika na pojedinim razinama znanja i sposobnosti (Tablica 2).

Tablica 1 sadrži zemlje sudionice PISA istraživanja svrstane u tri skupine s obzirom na ostvareni prosječni rezultat u odnosu na prosječni rezultat matematičke pismenosti svih zemalja članica OECD-a koji u ciklusu PISA 2015 iznosi 490 bodova. Zemlje čiji je prosječni rezultat značajno iznad navedenog prosjeka označene su žutom bojom, zemlje čiji se prosječni rezultat nalazi oko prosjeka OECD-a označene su svjetloplavom bojom, dok su zemlje čiji je prosječni rezultat značajno ispod prosjeka OECD-a označene plavom bojom.

Kako se prosječni rezultat pojedine zemlje dobiva procjenom testiranog uzorka učenika, a ne svih učenika neke zemlje, navedeni su i najviši i najniži rang koje ta zemlja može ostvariti.

Singapur je s 564 boda vodeći na ljestvici postignuća matematičke pismenosti, dok se Hrvatska s ispodprosječnim rezultatom od 464 boda nalazi između 40. i 42. mjesta od 72¹ zemlje sudionice ovog PISA ciklusa.

Tablica 1: Prosječni rezultati iz matematičke pismenosti u ciklusu PISA 2015 [3]

Zemlje	Prosjek	Najviši rang	Najniži rang
Singapur	564	1	1
Hong Kong (Kina)	548	2	3
Makao (Kina)	544	2	4
Kineski Tajpeh	542	2	4
Japan	532	5	6
B-S-J-G Kina	531	4	7
Južna Koreja	524	6	9
Švicarska	521	7	10
Estonija	520	7	10
Kanada	516	8	12
Nizozemska	512	10	14
Danska	511	10	15
Finska	511	10	15

¹Rezultati dviju zemalja (Malezije i Kazahstana) nisu u skladu s tehničkim standardima PISA-ina istraživanja pa se njihovi rezultati ne navode u tablici.

Zemlje	Prosjek	Najviši rang	Najniži rang
Slovenija	510	11	15
Belgija	507	12	18
Njemačka	506	12	19
Poljska	504	14	19
Irska	504	15	19
Norveška	502	16	20
Austrija	497	18	27
Novi Zeland	495	20	28
Vijetnam	495	18	32
Rusija	494	20	30
Švedska	494	20	30
Australija	494	21	29
Francuska	493	21	30
Ujedinjeno Kraljevstvo	492	21	31
Češka	492	21	31
Portugal	492	21	31
Italija	490	23	33
Island	488	27	33
Španjolska	486	29	34
Luksemburg	486	31	34
Latvija	482	32	36
Malta	479	34	38
Litva	478	34	38
Mađarska	477	35	39
Slovačka	475	35	39
Izrael	470	37	41
Sjedinjene Američke Države	470	38	41
Hrvatska	464	40	42
Buenos Aires - Argentina	456	40	44
Grčka	454	42	43
Rumunjska	444	43	45
Bugarska	441	44	46
Cipar	437	45	46
Ujedinjeni Arapski Emirati	427	47	48
Čile	423	47	51
Turska	420	47	54
Moldavija	420	48	54
Urugvaj	418	49	55

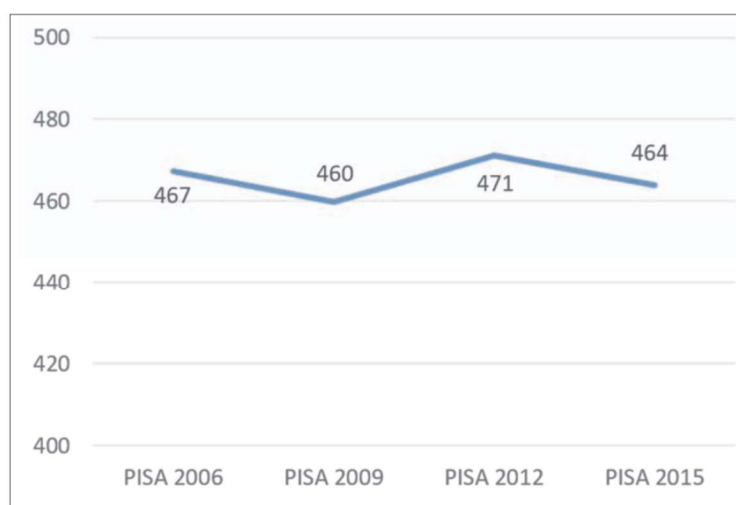
Zemlje	Prosjek	Najviši rang	Najniži rang
Crna Gora	418	49	54
Trinidad i Tobago	417	50	55
Tajland	415	49	55
Albanija	413	51	56
Meksiko	408	55	57
Gruzija	404	56	59
Katar	402	57	59
Kostarika	400	57	60
Libanon	396	58	61
Kolumbija	390	60	63
Peru	387	61	64
Indonezija	386	61	64
Jordan	380	63	65
Brazil	377	64	65
Makedonija	371	66	67
Tunis	367	66	68
Kosovo	362	67	69
Alžir	360	68	69
Dominikanska Republika	328	70	70

PISA je definirala šest razina znanja i sposobnosti (Tablica 2) u kojima su jasno definirane matematičke kompetencije učenika s određenim brojem bodova. Razina 1 obuhvaća najlakša pitanja, dok se razina 2 smatra osnovnom razinom znanja i sposobnosti na kojoj učenici posjeduju nužne kompetencije za učinkovito rješavanje svakidašnjih životnih problema koje zahtijevaju matematičku pismenost. Čak 32% hrvatskih učenika u ciklusu PISA 2015 nije postiglo osnovnu razinu (od toga 30% dječaka i 33.9% djevojčica). Prateći rezultate naših učenika na najzahtjevnijim razinama (razine 5 i 6) uviđamo da su i tu dječaci uspješniji od djevojčica. Pokazalo se da 7.1% dječaka i tek 4.1% djevojčica posjeduje sposobnost naprednog matematičkog mišljenja i zaključivanja.

Tablica 2: Sažeti opisi razina matematičkih znanja i sposobnosti [3]

Razina	Donja granica rezultata	Obilježja zadataka
6	669	Na razini 6 učenici posjeduju sposobnost konceptualiziranja, uopćavanja i korištenja podataka na temelju istraživanja i modeliranja kompleksnih problemskih situacija. Mogu povezivati različite izvore informacija i prikaze te prevoditi iz jednog prikaza u drugi. Učenici na ovoj razini posjeduju sposobnost naprednog matematičkog mišljenja i zaključivanja. Ti učenici spoznajom i dubokim razumijevanjem te dobrim vladanjem simboličkim i formalnim matematičkim operacijama i odnosima razvijaju nove pristupe i strategije u nošenju s novim situacijama. Sposobni su formulirati i precizno priopćiti svoje postupke i razmišljanja vezana uz vlastita otkrića, interpretacije, argumente te uz njihovu primjerenost za izvorne situacije.
5	607	Na razini 5 učenici posjeduju sposobnost razvijanja modela i rada s modelima za kompleksne situacije prepoznajući ograničenja i stvarajući pretpostavke. Sposobni su odabrati, uspoređivati i vrednovati odgovarajuće strategije za rješavanje kompleksnih problema vezanih uz te modele. Na ovoj razini učenici postupaju strateški služeći se širokim, visokorazvijenim vještinama mišljenja i zaključivanja, odgovarajućim povezanim prikazima, simboličkim i formalnim opisima te spoznajama vezanima uz te situacije. Sposobni su promišljati o svojim postupcima te formulirati i iznositi svoja tumačenja i zaključke.
4	545	Na razini 4 učenici uspješno rade s eksplicitnim modelima za kompleksne konkretne situacije koje mogu uključivati ograničenja ili zahtijevati stvaranje pretpostavki. Sposobni su odabrati i integrirati različite prikaze, uključujući simboličke, izravno ih povezujući s aspektima stvarnih životnih situacija. Na ovoj razini učenici posjeduju dobro razvijene vještine i fleksibilni su u zaključivanju. Sposobni su ponuditi i iznositi objašnjenja i argumente na temelju svojih interpretacija, argumenata i postupaka.
3	482	Na razini 3 učenici mogu izvršiti jasno opisane postupke, uključujući postupke koji traže sekvencijalno odlučivanje. Sposobni su odabrati i primijeniti jednostavne strategije za rješavanje problema. Na ovoj razini učenici mogu tumačiti i koristiti prikaze temeljene na različitim izvorima informacija i izravno iz njih izvoditi zaključke. Sposobni su proizvesti kratke iskaze te izvijestiti o svojim interpretacijama, rezultatima i zaključcima.
2	420	Na razini 2 učenici posjeduju sposobnost tumačenja i prepoznavanja situacija u kontekstima koji zahtijevaju samo izravno zaključivanje. Mogu izvući relevantne podatke iz samo jednog izvora te koristiti samo jedan način prikazivanja. Na ovoj razini učenici su sposobni koristiti osnovne algoritme, formule, postupke ili konvencije. Mogu izravno zaključivati i doslovno tumačiti rezultate.
1	358	Na razini 1 učenici mogu odgovoriti na pitanja vezana uz poznate kontekste u kojima su prisutni svi relevantni podaci i u kojima su pitanja jasno definirana. Sposobni su prepoznati podatke i izvršavati rutinske postupke u skladu s izravnim uputama u eksplicitnim situacijama. Mogu izvršavati postupke koji su očiti i sami po sebi razumljivi iz prikazanog stimulusa.

Prosječan rezultat pojedine zemlje govori nam koliko obrazovni sustav osigurava učenicima potrebna znanja i vještine za snalaženje u svakodnevnom životu. Uspoređujući podatke s prethodnim PISA-inim ciklusima, možemo ustanoviti napreduje li ili nazaduje pojedini obrazovni sustav. Na Slici 3 vidljivo je da nema značajnije promjene u rezultatima hrvatskih učenika, ali je zabilježen porast udjela najlošijih učenika (s 29.9% u ciklusu PISA 2012 na 32% u ciklusu PISA 2015) te ujedno i pad udjela najuspješnijih učenika (sa 7% u ciklusu PISA 2012 na 5.6% u ciklusu PISA 2015).



Slika 3: Promjene u postignuću hrvatskih učenika u matematici od ciklusa PISA 2006 [3]

5. Primjeri zadataka iz matematičke pismenosti

5.1. Pizze

U jednoj pizzeriji poslužuju okrugle pizze iste debljine, ali različitih veličina. Manja pizza ima promjer 30 cm i stoji 30 zeda, a veća pizza ima promjer 40 cm i stoji 40 zeda. Koja je pizza isplativija? Prikaži kako si došao/la do zaključka [2].

Odgovor: Veća pizza isplativija je od manje, a do rješenja dolazimo izračunavanjem cijene po jedinici površine za svaku pizzu te uspoređivanjem isplativosti.

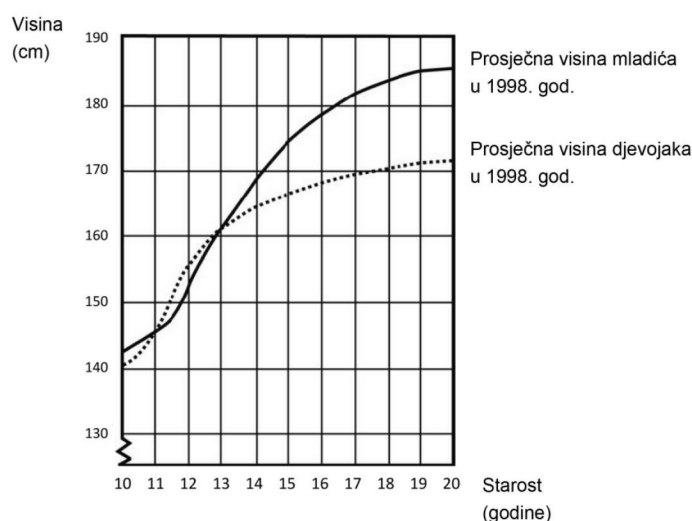
Sadržaj: Prema elementima geometrije pitanje se može svrstati u sadržajnu kategoriju *prostor i oblik*. Međutim, ono obuhvaća i sadržajnu kategoriju *količina* jer je potrebno usporediti količinu s iznosom novca. Ipak, ovo je pitanje svrstano u sadržajnu kategoriju *promjena i odnosi* jer je za njegovo rješavanje ključno povezati promjenu u površini dviju pizza s obzirom na promjenu u promjeru i cijeni pizze.

Kontekst: Pitanje pripada *osobnom* kontekstu jer učenici trebaju odgovoriti koju pizzu smatraju isplativijom.

Proces: Ključni proces prisutan u ovom pitanju je *formuliranje*. Pizze možemo modelirati kao tanke kružne valjke te se trebamo fokusirati na površinu kruga-pizze, a ne na njenu masu ili obujam s obzirom da su pizze iste debljine.

5.2. Rast

Slika 4 sadrži grafikon s prosječnom visinom mladića i djevojaka u 1998. godini.



Slika 4: Prosječna visina mladića i djevojaka u 1998. godini

Tijekom kojeg razdoblja života su, prema grafikonu, djevojčice u prosjeku više od dječaka iste starosne dobi [12]?

Odgovor: U razdoblju od 11 do 13 godina starosti.

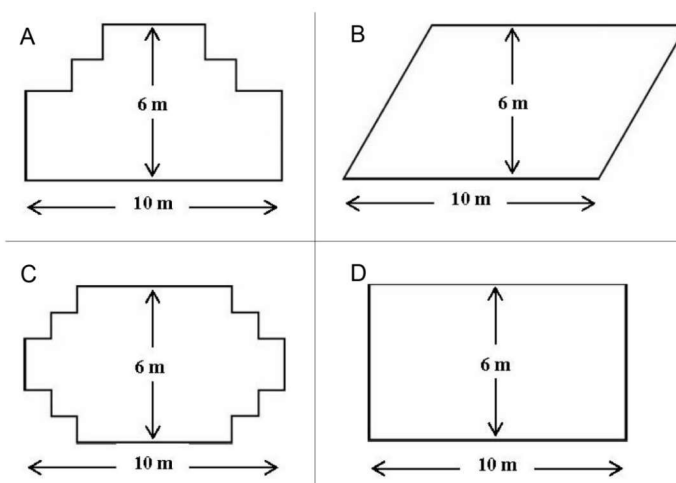
Sadržaj: Riječ je o dobi i visini mladića i djevojaka pa je sadržajno područje ovog pitanja *promjena i odnosi*.

Kontekst: Pitanje pripada *znanstvenom* kontekstu jer se tiče primjene matematike u prirodnom svijetu gdje je rast ključan element.

Proces: Temeljni proces je *primjenjivanje* jer učenici trebaju usporediti obilježja dviju grupa podataka (analizirati podatke iz grafikona), protumačiti ih te izvesti zaključke.

5.3. Stolar

Neki stolar ima 32 metra drvene građe i želi napraviti obrub oko gredice u vrtu. Na Slici 5 prikazani su nacrti koje razmatra za izradu vrtne gredice [2].



Slika 5: Nacrti za izradu vrtne gredice

Zaokruži "da" ili "ne" za svaki nacrt da bi naznačio/la može li se vrtna gredica načiniti s 32 metra drvene građe.

Nacrt vrtne gredice	Može li se vrtna gredica načiniti od 32 metra greda uz pomoć ovog nacrta?
nacrt A	da / ne
nacrt B	da / ne
nacrt C	da / ne
nacrt D	da / ne

Odgovor: Nacrt A – da, nacrt B – ne, nacrt C – da, nacrt D – da.

Sadržaj: Pitanje se bavi svojstvima oblika te je svrstano u kategoriju *prostor i oblik*.

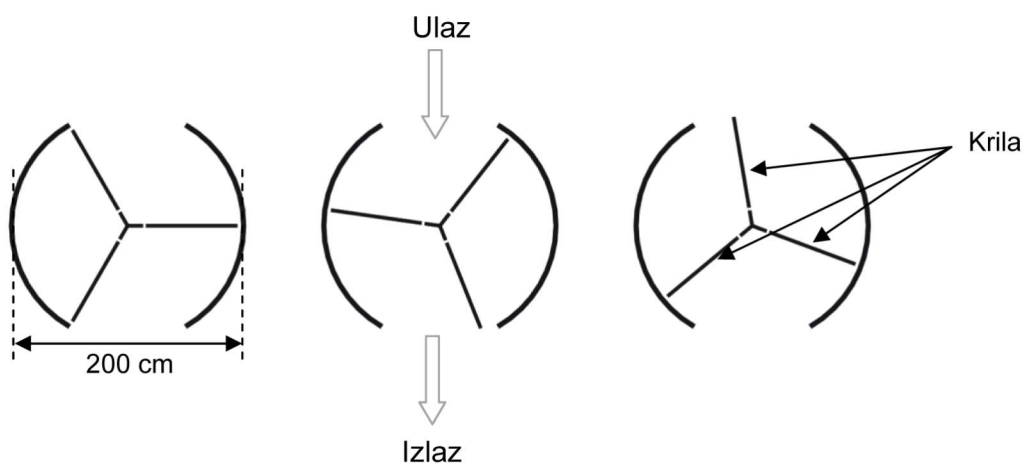
Kontekst: Zadan je radni zadatak stolara pa pitanje pripada *profesionalnom* kontekstu.

Proces: Najveći kognitivni izazov za učenike ovdje je razvijanje strategije za pronalaženje informacija o ukupnoj duljini stranica te zaključivanje o komparativnim duljinama. Učenici su trebali povezati nacрте s vrtovima i opsege s dostupnom količinom drvene građe. Pitanje se rješava *primjenjivanjem* geometrijskog znanja i zaključivanja jer je za tri nacрте A, C i D navedeno dovoljno podataka kako bi se mogao izračunati opseg, no ne i za nacrt B gdje treba prepoznati da se radi o prevelikom opsegu.

Pitanje je korišteno u PISA ciklusima 2000. i 2003. te je poznato da je 2003. tek nešto manje od 20% učenika na njega točno odgovorilo.

5.4. Okretna vrata

Okretna vrata sastoje se od tri krila koja se okreću unutar prostora koji ima oblik kruga. Unutarnji dijametar tog prostora iznosi 2 metra (200 centimetara). Tri vratna krila dijele taj prostor u tri jednaka odjeljka. Slika 6 prikazuje tri različita položaja vratnih krila gledana odozgo [12].



Slika 6: Okretna vrata

- **1. pitanje:** *Koja je veličina kuta (u stupnjevima) koji tvore dvoje vratnih krila?*

Odgovor: 120° (Prihvaća se i izbočeni kut od 240° .)

Sadržaj: Pitanje zahtijeva znanje da jedan okretaj vrata čini puni krug što iznosi 360° te ujedno i sposobnost prostornog razumijevanja prikaza i stoga je svrstano u kategoriju *prostor i oblik*.

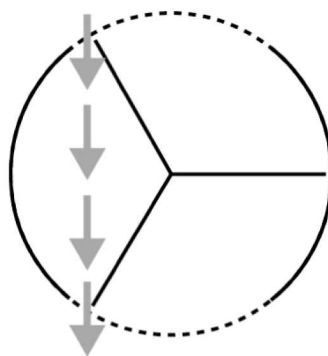
Kontekst: Pitanje se bavi uzročno-posljedičnim vezama iz stvarnosti te je iz tog razloga smješteno u *znanstveni* kontekst.

Razina: 3

Procesi: Ovo pitanje klasificirano je kao *primjenjivanje* jer je potrebno na osnovu temeljnog znanja iz geometrije doći do rješenja. Učenici trebaju broj stupnjeva punog kuta podijeliti na tri vratna krila kako bi dobili kut koji tvore dvoje vratnih krila.

Naizgled vrlo jednostavan zadatak, ali ispitanici nisu pokazali zavidno znanje pri njegovom rješavanju te se ovo pitanje nalazi na razini 3 skale matematičke pismenosti.

- **2. pitanje:** *Dva otvora na vratima (točkasti lukovi na slici) jednake su veličine. Ako bi ti otvori bili preširoki, krila koja se okreću ne bi mogla držati prostor zatvorenim, a zrak bi tada mogao slobodno cirkulirati između ulaza i izlaza uzrokujući neželjeni gubitak topline ili povećanje topline. To je prikazano na Slici 7.*



Slika 7: Moguće cirkuliranje zraka u ovom položaju

Koliko iznosi maksimalna duljina luka u centimetrima (cm) koju bi svaki otvor na vratima mogao imati kako zrak nikad ne bi mogao slobodno cirkulirati između ulaza i izlaza?

Odgovor: Odgovori u rasponu od 103 do 105. (Prihvaćaju se odgovori izračunati kao $\frac{1}{6}$ opsega kruga $\left(\frac{100\pi}{3}\right)$. Također, prihvaća se odgovor "100" samo ako je jasno da je taj odgovor dobiven korištenjem $\pi = 3$.)

Sadržaj: Kao i prvo, i ovo je pitanje smješteno u sadržajnu kategoriju *prostor i oblik* jer se temelji na geometriji.

Kontekst: Kako se pitanje bavi primjenom matematike u stvarnom svijetu, svrstano je u *znanstveni* kontekst.

Razina: 6

Procesi: Ovo pitanje je jedno od najtežih korištenih u istraživanju te iziskuje visok stupanj matematizacije jer zahtijeva modeliranje i rješavanje praktičnog geometrijskog problema. Potrebno je prevesti problem iz stvarne situacije u domenu matematike, tj. pronaći geometrijsku strukturu pa je ovo pitanje klasificirano kao *formuliranje*.

- **3. pitanje:** *Vrata naprave 4 puna okretaja u jednoj minuti. U svakom od tri odjeljka ima mjesta za dvoje ljudi. Koliko najviše ljudi može ući u zgradu kroz ta vrata u 30 minuta?*

- A) 60
- B) 180
- C) 240
- D) 720

Odgovor: D) 720

Sadržaj: Pitanje pripada kategoriji *količina* jer pomoću računanja trebamo utvrditi koliko najviše ljudi može ući u zgradu kroz ta vrata u zadanom vremenu.

Kontekst: I ovdje se radi o primjeni matematike u stvarnosti pa je i ovo pitanje smješteno u *znanstveni* kontekst.

Razina: 4

Procesi: Ovo pitanje je također klasificirano kao *formuliranje* te je potrebno pronaći predložene podatke i konstruirati kvantitativni model radi rješavanja problema.

5.5. Devizni tečaj

Mei-Ling iz Singapura pripremala se na odlazak u Južnu Afriku na 3 mjeseca kao učenica na razmjenu. Trebala je promijeniti singapurske dolare (SGD) u južnoafričke

rande (ZAR) [12].

- **1. pitanje:** Mei-Ling saznala je da devizni tečaj između singapurskih dolara i južnoafričkih randa iznosi: $1 \text{ SGD} = 4.2 \text{ ZAR}$. Mei-Ling je promijenila 3000 singapurskih dolara u južnoafričke rande po tom deviznom tečaju. Koliko je novca u južnoafričkim randima Mei-Ling dobila?

Odgovor: 12600 ZAR

Sadržaj: Pitanje pripada sadržajnoj kategoriji *količina* jer zahtijeva jednu od četiri osnovne računske operacije, odnosno množenje.

Kontekst: Kako se pitanje tiče šire zajednice smješteno je u *društveni* kontekst.

Razina: 1

Proces: Proces *primjenjivanje* vezan je za rješavanje ovog zadatka i potreban je tek niski stupanj matematizacije kako bi se došlo do rješenja jer se od učenika traži razumijevanje jednostavnog teksta u kojem su navedeni svi podaci za potrebni rutinski postupak.

- **2. pitanje:** Na povratku iz Singapura nakon 3 mjeseca, Mei-Ling je ostalo još 3900 ZAR. Promijenila ih je natrag u singapurske dolare, primijetivši da se devizni tečaj promijenio na: $1 \text{ SGD} = 4.0 \text{ ZAR}$. Koliko je novca u singapurskim dolarima Mei-Ling dobila?

Odgovor: 975 SGD

Sadržaj: Kako je potrebno primijeniti matematičku operaciju s brojevima (dijeljenje) da bismo došli do rješenja, pitanje pripada kategoriji *količina*.

Kontekst: Kao i prethodno pitanje, ovo također pripada *društvenom* kontekstu.

Razina: 2

Procesi: I ovo pitanje sadržava sve potrebne podatke za navedeni rutinski postupak te se od učenika zahtijeva *primjenjivanje*.

- **3. pitanje:** Tijekom tih 3 mjeseca, devizni tečaj se promijenio s 4.2 na 4.0 ZAR za jedan SGD. Je li za Mei-Ling bilo povoljno da je sada devizni tečaj iznosio 4.0 ZAR umjesto 4.2 ZAR, kad je promijenila južnoameričke rande natrag u singapurske dolare? Navedi obrazloženje kako bi potkrijepio/la svoj odgovor.

Odgovor: "Da", s prikladnim obrazloženjem:

- Da, s nižim deviznim tečajem (za 1 SGD) Mei-Ling će dobiti više singapurskih dolara za svoje južnoafričke rande.
- Da, jer uz 4.2 ZAR za jedan dolar dobila bi 929 ZAR.
- Da, jer je dobila 4.2 ZAR za 1 SGD, a sada mora platiti samo 4.0 ZAR da bi dobila 1 SGD.
- Da, jer je to jeftinije za 0.2 ZAR po svakom SGD.
- Da, jer kad se dijeli s 4.2, rezultat je manji nego kada se dijeli s 4.
- Da, za nju je to bilo povoljno jer, da tečaj nije pao, dobila bi oko 50 \$ manje.

Sadržaj: Operacije s brojevima ključne su kako bismo došli do rezultata pa je pitanje smješteno u kategoriju *količina*.

Kontekst: Pitanje se odnosi na širu zajednicu te pripada *društvenom* kontekstu.

Razina: 4

Procesi: U ovom zadatku potreban je visok stupanj matematizacije jer zahtijeva razmišljanje o procesu potrebnom za rješavanje problema te logičko zaključivanje i argumentiranje. Konkretnije, učenici trebaju promišljati o konceptu deviznog tečaja i o njegovim posljedicama u određenoj situaciji pa zadatak pripada kategoriji matematičkih procesa *tumačenje*.

5.6. Potres

Prikazan je dokumentarni film o potresima i o tome koliko se često događaju. Raspravljalo se i o tome mogu li se potresi predvidjeti. Jedan je geolog izjavio: "Vjerojatnost da će se u sljedećih dvadeset godina u Zedogradu dogoditi potres iznosi 2 : 3". Koje od sljedećeg najbolje odražava smisao izjave tog geologa?

- A) $\frac{2}{3} \cdot 20 = 13.3$. Prema tome, u Zedogradu će se dogoditi potres za 13-14 godina.
- B) $\frac{2}{3}$ je više od $\frac{1}{2}$ pa možemo biti sigurni da će se u Zedogradu dogoditi potres u neko doba tijekom sljedećih 20 godina.
- C) Vjerojatnost da će se u Zedogradu dogoditi potres u neko doba tijekom sljedećih 20 godina veća je od vjerojatnosti da se potres neće dogoditi.

D) Ne može se reći što će se dogoditi jer nitko ne može biti siguran kad će do potresa doći.

Odgovor: C) Vjerojatnost da će se u Zedogradu dogoditi potres u neko doba tijekom sljedećih 20 godina veća je od vjerojatnosti da se potres neće dogoditi.

Sadržaj: Znanstveno predviđanje prisutno je u ovom pitanju te ono pripada kategoriji *neizvjesnost i podaci*.

Kontekst: Pitanje je smješteno u *znanstveni* kontekst jer je vezano uz znanstvena pitanja koja se odnose na prirodnu pojavu.

Proces: Na osnovu zadanih podataka potrebno je prosuđivati i izvoditi zaključke pa se ovdje zahtijeva proces *tumačenja*.

Zaključak

Matematička pismenost nije osobina pojedinca, nego je vrijedna sposobnost koja omogućava rješavanje problema iz stvarnog života korištenjem matematike. Ona se gradi tijekom cijeloga života, od najranije vrtićke dobi. Biti matematički pismen podrazumijeva posjedovanje i primjenu matematičkih sposobnosti poput razvijanja strategija za rješavanje problema, komuniciranja, prikazivanja, logičkog zaključivanja i argumentiranja te korištenja matematičkih alata. Matematizacija zahtijeva prevođenje formalnog jezika na matematički, modeliranje matematičkih problema, analiziranje, generaliziranje, zaključivanje i tumačenje. PISA vrednuje matematičko znanje, procese i sposobnosti učenika kako bi uvidjela njihovu spremnost za uspješno i aktivno sudjelovanje u današnjem društvu. Matematička pismenost podrazumijeva primjenu stečenih znanja u raznim situacijama te se ispitna pitanja pomno odabiru kako bi što bolje prikazala eventualne izazove s kojima bi se ispitanici mogli susresti. Hrvatska od ciklusa PISA 2006 sudjeluje u istraživanju, ali su rezultati statistički gotovo nepromjenjivi. Nacionalna izvješća donose precizne pokazatelje kvalitete našeg obrazovnog sustava te se oni mogu učinkovito iskoristiti radi unaprjeđenja obrazovanja, a time i gospodarstva, odnosno društva u cjelini. Prema rezultatima naši učenici najviše problema imaju pri rješavanju kontekstualiziranih zadataka gdje trebaju zadani problem prevesti u domenu matematike, dok im rutinski zadaci puno bolje leže. Osim toga, velik su im problem i zadaci s dugim uvodnim tekstom, koje najčešće ni ne pokušavaju riješiti. Poražavajuća je činjenica da je trećina učenika u Hrvatskoj "matematički nepismena", odnosno završava obavezno školovanje bez osnovne razine matematičke pismenosti. Dakle, nužne su promjene prvenstveno u području matematike kako bi naši učenici stekli potrebne sposobnosti za produktivno sudjelovanje u životnim izazovima jer je upravo razvijanje matematičke pismenosti ključ koji vodi prema uspješnoj budućnosti.

Literatura

- [1] H. BANU, *The importance of the teaching of mathematical modelling in Bangladesh*, Teaching of Mathematical Modelling and Applications (M. Niss, W. Blum, I. Huntley), 1991., 117-120.
- [2] M. BRAŠ ROTH, A. MARKOČIĆ DEKANIĆ, M. MARKUŠ SANDRIĆ, M. GREGUROVIĆ, *PISA 2012. Matematičke kompetencije za život*, Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja, Zagreb, 2013.
- [3] M. BRAŠ ROTH, A. MARKOČIĆ DEKANIĆ, M. MARKUŠ SANDRIĆ, *PISA 2015. Prirodoslovne kompetencije za život*, Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja, Zagreb, 2017.
- [4] J. DE LANGE, *Mathematics for Literacy*, Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges (B. L. Madison, L. A. Steen), Princeton, NJ: The National Council on Education and the Disciplines (NCED), 2003., 75-89.
- [5] H. FREUDENTHAL, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht: Reidel, 1983.
- [6] H. FREUDENTHAL, *Revisiting Mathematics Education, China Lectures*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [7] D. GLASNOVIĆ GRACIN, *Matematička pismenost (1. dio)*, Matematika i škola, Element d.o.o., Zagreb, 2007., 155-163.
- [8] M. HOPE, *Mathematical Literacy*, Principal Leadership, National Association of Secondary School Principals, Reston, 2007., 28-31.
- [9] E. JABLONKA, *Mathematical Literacy*, Second International Handbook of Mathematics Education (A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, F. K. S. Leung), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003., 75-102.
- [10] L. A. STEEN, *Mathematics and Democracy: The Case for Quantitative Literacy*, National Council on Education and the Disciplines, Princeton, 2001.

- [11] INTERNATIONAL LIFE SKILLS SURVEY (ILSS), *Policy Research Initiative*, Statistics Canada, 2000.
- [12] NACIONALNI CENTAR ZA VANJSKO VREDNOVANJE OBRAZOVANJA, *Primjeri PISA zadataka iz matematičke pismenosti: testovi "papir-olovka" (PISA 2000, PISA 2003, PISA 2012)*, Zagreb, 2018.
- [13] NATIONAL CENTER FOR EDUCATION STATISTICS (NCES), *National Adult Literacy Survey*, National Center for Education Statistics, Washington D. C., 1993.

Sažetak

Ovaj rad se bavi ulogom i važnosti matematike u svakodnevnom životu. Naime, mnoge životne izazove moguće je riješiti primjenom matematike te je ustanovljeno kako su pojedinci koji posjeduju sposobnost korištenja usvojenih matematičkih znanja puno uspješniji u društvu.

U radu smo se upoznali s PISA-inim istraživanjem te je opisan njezin konceptualni okvir matematičke pismenosti.

Matematička pismenost odnosi se na sposobnost pojedinca da koristi matematizaciju, tj. da matematički formulira kontekstualizirani problem, primjenjuje matematičke koncepte, činjenice i postupke te da zaključuje, tumači i vrednuje matematičke rezultate. Navedene su i osnovne matematičke sposobnosti koje su zastupljene u ovim matematičkim procesima.

Prikazani su i posljednji rezultati PISA-inih istraživanja koji predočavaju kvalitetu pojedinih obrazovnih sustava te daju smjernice za njihovo poboljšanje.

Na samom kraju navedeni su i objašnjeni primjeri zadataka korištenih u PISA-inom istraživanju matematičke pismenosti.

Ključne riječi: PISA, matematički procesi, matematičke sposobnosti, matematizacija.

Summary

This thesis deals with a role and importance of mathematics in everyday life. In fact, many life challenges can be dealt with by using mathematics and it has been determined that individuals with capabilities of using mathematical knowledge they've been taught are more successful in life.

In this thesis we get familiar with PISA's research and its conceptual framework of mathematical literacy is given.

Mathematical literacy relates to individuals ability of using mathematisation, i.e. to mathematically formulate contextualized problem, to apply mathematical concepts, facts and procedures and to make conclusions, interpretations and evaluations of mathematical results. Basic mathematical capabilities represented in these mathematical processes are also listed.

Last results of PISA's research are shown. They represent the quality of particular educational systems and provide guidelines for enhancements.

Examples used in PISA's research of mathematical literacy are given and explained at the end of the thesis.

Key words: PISA, mathematical processes, mathematical capabilities, mathematisation.

Životopis

Zovem se Manuela Pavić. Rođena sam 30. studenoga 1988. godine u Otoku. Od 1995. do 2003. godine pohađala sam Osnovnu školu "Josipa Lovrećića" u Otoku. Tijekom osnovnoškolskog obrazovanja sudjelovala sam na natjecanjima iz matematike. Nakon završetka osnovne škole upisala sam Gimnaziju Matije Antuna Reljkovića u Vinkovcima, opći smjer, koju sam završila 2007. godine. Iste sam godine upisala Preddiplomski studij na Odjelu za matematiku u Osijeku, a 2009. godine prebacujem se na Nastavnički studij matematike i informatike. Školske godine 2012.-2013. i 2013.-2014. radila sam kao asistentica u nastavi za učenike s posebnim obrazovnim potrebama. Drugo polugodište školske godine 2014.-2015. radila sam na radnom mjestu nastavnika matematike i računalstva u Školi za turizam, ugostiteljstvo i trgovinu u Puli. Nakon toga, iduće tri školske godine radila sam na mjestu nastavnika matematike i računalstva u Strukovnoj školi Eugena Kumičića u Rovinju gdje sam bila i administrator e-Dnevnika.